Übungsblatt 8 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen
FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Bitte wenden Sie den Gauss-Jordan-Algorithmus an, um die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -2 & -2 & -3 \\ 0,5 & 5,75 & -43,5 \end{pmatrix}$ auf Diagonalgestalt zu bringen. Geben Sie dabei die benutzten Transformationsmatrizen mit an.

Lösung Aufgabe 1

		$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -2 & -2 & -3 \\ 0,5 & 5,75 & -43,5 \end{pmatrix}$	$= A^{(0)}$
Addiere erste Zeile zur zweiten	$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0,5 & 5,75 & -43,5 \end{pmatrix}$	$= A^{(1)}$
Subtrahiere 1/4 mal erste Zeile von dritter	$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,25 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & -42 \end{pmatrix}$	$= A^{(2)}$
Subtrahiere 5 mal zweite Zeile von dritter	$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$= A^{(3)}$
Addiere drei mal dritte Zeile zu zweiter	$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$= A^{(4)}$
Addiere zwei mal dritte Zeile zu erster	$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$= A^{(5)}$
Subtrahiere drei mal zweite von erster Zeile	$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$= A^{(6)}$

Aufgabe 2

Das folgende lineare Gleichungssystem liegt in Zeilenstufenform vor:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-1	2	0	1	1	5	10
0	1	3	1	-1	2	10
0	0	0	2	6	1	10
0	0	0	0	0	0	y

a.) Für welche Werte von y ist das Gleichungssystem lösbar?

b.) Bitte bestimmen Sie die Lösungsmenge für den Fall, dass $y = 0$ gilt.

c.) Was ist die Dimension der Lösungsmenge im Fall $y = 0$, und was stellt die Lösungsmenge geometrisch dar?

Lösung Aufgabe 2

a.) Wir zeigen: LGS lösbar $\iff y = 0$.
Beweis $'' \Longrightarrow''$: Wenn das LGS lösbar ist, ist insbesondere die letzte Gleichung lösbar. Da die linke Seite der Gleichung stets Null ist, muss auch $y = 0$ gelten.
$'' \Longleftarrow''$: Im Fall $y = 0$ liegt das LGS in Zeilenstufenform vor und es gibt Lösungen, vgl. Teil b. der Aufgabe.
Damit ist das LGS genau dann lösbar, wenn $y = 0$ gilt.

b.)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\lambda_3 + 6\lambda_2 + \frac{3}{2}\lambda_1 + 5 \\ -3\lambda_3 + 4\lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_1 + 5 \\ \lambda_3 \\ -3\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 + 5 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Nebenrechnung:</u>

Berechnung x_6: Frei wählbar, setze $x_6 = \lambda_1$

Berechnung x_5: Frei wählbar, setze $x_5 = \lambda_2$

Berechnung x_4: 3-te Gleichung: $2 \cdot x_4 + 6 \cdot x_5 + x_6$

$\Rightarrow 2 \cdot x_4 + 6\lambda_2 + \lambda_1 = 10$

$\Rightarrow x_4 + 3\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1 = 5$

$\Rightarrow x_4 = -3\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 + 5$

Berechnung x_3: Frei wählbar, setze $x_3 = \lambda_3$

Berechnung x_2: 2-te Gleichung: $x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 - x_5 + 2 \cdot x_6 = 10$

$\Rightarrow x_2 + 3\lambda_3 - 3\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 + 5 - \lambda_2 + 2\lambda_1 = 10$

$\Rightarrow x_2 = -3\lambda_3 + 3\lambda_2 + \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1 - 2\lambda_1 + 10 - 5$

$\Rightarrow x_2 = -3\lambda_3 + 4\lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_1 + 5$

Berechnung x_1: 1-te Gleichung: $-x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 + x_5 + 5 \cdot x_6 = 10$

$\Rightarrow -x_1 + 2 \cdot \left(-3\lambda_3 + 4\lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_1 + 5\right) + (-3\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 + 5) + \lambda_2 + 5\lambda_1 = 10$

$\Rightarrow -x_1 - 6\lambda_3 + 8\lambda_2 - 3\lambda_1 + 10 - 3\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 + 5 + \lambda_2 + 5\lambda_1 = 10$

$\Rightarrow -x_1 = 6\lambda_3 - 8\lambda_2 + 3\lambda_2 - \lambda_2 + 3\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 - 5\lambda_1 + 5$

$\Rightarrow x_1 = -6\lambda_3 + 6\lambda_2 + \frac{3}{2}\lambda_1 + 5$

c.) Die Dimension der Lösungsmenge ist 3, da drei mal frei gewählt werden konnte (drei λs). Die Lösungsmenge stellt einen drei-dimensionalen Raum im $\mathbb{R}^6$ dar.

Aufgabe 3

a.) Bitte bringen Sie das folgende LGS

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 &= 4 \\ -6 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 - 10 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 &= -9 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 + 4 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 10 \cdot x_5 &= 16 \end{aligned}$$

auf die Form

x_1	$\cdots$	x_n	
a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	b_m

b.) Bitte lösen Sie das LGS.

c.) Bitte machen Sie die Probe: Der nicht-parametrisierte Vektor aus der Beschreibung des Lösungsraums (der ohne λ davor) muss das LGS erfüllen. Die parametrisierten Anteile der Lösung (mit λs davor) müssen das zugehörige homogene LGS, bei dem die linken Seiten der Gleichungen unverändert bleiben, aber die rechten Seiten Null sind, erfüllen.

d.) Was ist der Rang des LGS und die Dimension der Lösungsmenge?

Lösung Aufgabe 3

a.)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	4	0	4
-6	-3	-5	-10	4	-9
2	1	4	8	10	16

b.)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	4	0	4
-6	-3	-5	-10	4	-9
2	1	4	8	10	16

addiere 3-faches der ersten Zeile zur zweiten Zeile

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	4	0	4
0	0	1	2	4	3
2	1	4	8	10	16

addiere -1-faches der ersten Zeile zur dritten Zeile

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	4	0	4
0	0	1	2	4	3
0	0	2	4	10	12

addiere -2-faches der zweiten Zeile zur dritten Zeile

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	4	0	4
0	0	1	2	4	3
0	0	0	0	2	6

Jetzt liegt das LGS in Zeilenstufenform vor, und die Koeffizienten der Lösungsvektoren werden in der Reihenfolge x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 ermittelt.

Nebenrechnung:

Berechnung x_5: 3-te Gleichung: $2 \cdot x_5 = 6$
$\Rightarrow x_5 = 3$
Berechnung x_4: Frei wählbar, setze $x_4 = \lambda_1$
Berechnung x_3: 2-te Gleichung: $x_3 + 2 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 = 3$
$\Rightarrow x_3 + 2\lambda_1 + 4 \cdot 3 = 3 \Rightarrow x_3 = -9 - 2\lambda_1$
Berechnung x_2: Frei wählbar, setze $x_2 = \lambda_2$
Berechnung x_1: 1-te Gleichung: $2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 4$
$\Rightarrow 2x_1 + \lambda_2 + 2 \cdot (-9 - 2\lambda_1) + 4\lambda_1 = 4$
$\Rightarrow 2x_1 + \lambda_2 - 18 - 4\lambda_1 + 4\lambda_1 = 4$
$\Rightarrow x_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 - 9 = 2$
$\Rightarrow x_1 = 11 - \frac{1}{2}\lambda_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - \frac{1}{2}\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -9 - 2\lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L = (11, 0, -9, 0, 3) + \lambda_1(0, 0, -2, 1, 0) + \lambda_2(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0)$$

c.)

I.) Erster Teil der Probe.
Probe mit dem LGS, ob der nicht parametrisierte Vektor das LGS erfüllt.
$(11, 0, -9, 0, 3) \Rightarrow x_1 = 11, x_2 = 0, x_3 = -9, x_4 = 0, x_5 = 3$

I.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 2 \cdot 11 + 0 + 2 \cdot (-9) + 0 &= 4 \\ 22 - 18 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

II.)

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 10x_4 + 4x_5 &= -9 \\ -6 \cdot 11 - 0 - 5 \cdot -9 - 0 + 4 \cdot 3 &= -9 \\ -66 + 45 + 12 &= -9 \\ -9 &= -9 \end{aligned}$$

III.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 10x_5 &= 16 \\ 2 \cdot 11 + 0 + 4 \cdot (-9) + 0 + 10 \cdot 3 &= 16 \\ 22 - 36 + 30 &= 16 \\ 16 &= 16 \end{aligned}$$

Das LGS wird durch den nicht parametrisierten Vektor erfüllt.
Erster Teil der Probe ist erfüllt.

Zweiter Teil der Probe.
Probe mit dem LGS, ob die parametrisierten Vektoren das zugehörige homogene LGS erfüllen.
1. Fall: $\lambda_1(0,0,-2,1,0) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -2, x_4 = 1, x_5 = 0$

I.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 0 + 0 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 &= 0 \\ -4 + 4 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

II.)

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 10x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 0 - 0 - 5 \cdot -2 - 10 \cdot 1 + 0 &= 0 \\ 10 - 10 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

III.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 10x_5 &= 0 \\ 0 + 0 + 4 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 + 0 &= 0 \\ -8 + 8 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

2. Fall: $\lambda_2(-\frac{1}{2},1,0,0,0) \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$

I.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2 \cdot -\frac{1}{2} + 1 + 0 + 0 &= 0 \\ -1 + 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

II.)

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 10x_4 + 4x_5 &= 0 \\ -6 \cdot -\frac{1}{2} - 3 \cdot 1 - 0 - 0 + 0 &= 0 \\ 3 - 3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

III.)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 10x_5 &= 0 \\ 2 \cdot -\frac{1}{2} + 1 + 0 + 0 + 0 &= 0 \\ -1 + 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Das zu gehörige homogene LGS wird durch die parametrisierten Lösungsvektoren erfüllt.
Damit ist auch der zweite Teil der Probe korrekt und d.h. das Ergebnis des LGS ist korrekt.

d.) Die Dimension der Lösungsmenge ist 2, da zwei parametrisierte Vektoren im Lösungsraum vorkommen (zwei unterschiedliche λ).
Da das Gleichungssystem fünf Unbekannte hat, ist der Rang 5-2 = 3.

Aufgabe 4

Bitte kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen über Lineare Gleichungssysteme (kurz: "LGS") richtig oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung.

Aussage	**Richtig**	**Falsch**	**Begründung**
Jedes lineare Gleichungssystem hat eine Lösung.		X	Ein LGS kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.
Jedes lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.		X	Ein LGS kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.
Wenn das LGS genauso viele Zeilen wie Unbekannte hat, dann hat es immer eine Lösung.		X	Ein Gegenbeispiel ist das LGS $\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & \\ 0 & 1 & = & 1 \\ 0 & 2 & = & 1 \end{array}$
Wenn alle Absolutglieder Null sind, dann hat das LGS mindestens eine Lösung.	X		Es gibt dann die Lösung, dass alle Variablen zugleich 0 sind.
Es gibt ein Verfahren, das für jedes LGS eine Lösung findet oder feststellt, dass es keine Lösung gibt.	X		Der Gauß-Algorithmus.
$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 5$ ist ein lineares Gleichungssystem.		X	Es ist eine UNgleichung. In linearen Gleichungssystemen ist stets die Gleichheit gefordert.
Wenn die Koeffizientenmatrix des LGS Zeilenstufenform hat, kann man sehr leicht sehen, ob es eine Lösung gibt, und in diesem Fall auch eine Lösung leicht ausrechnen.	X		Genau dann, wenn es Nullzeilen gibt, deren rechte Seite nicht Null ist, ist das LGS unlösbar. D.h., die Lösbarkeit kann sehr leicht entschieden werden. Im Falle der Lösbarkeit kann man eine Lösung (sogar: den Lösungsraum) leicht finden, indem man die Werte der Variablen beginnend mit der letzten ausrechnet (Rückwärtseinsetzen).
Am anspruchsvollsten: Wenn die Zeilen der Matrix A im LGS $A \cdot x = b$ als Vektoren linear unabhängig sind, hat das LGS mindestens eine Lösung.	X		Wenn die Zeilen linear unabhängig sind, ist die Dimension des von ihnen aufgespannten Raumes gleich der Anzahl der Zeilen. Elementare Zeilentransformationen ändern den aufgespannten Raum nicht, damit auch seine Dimension nicht. Deshalb kann beim Gauss-Algorithmus keine Nullzeile entstehen, wenn das LGS auf Zeilenstufenform gebracht wird. Damit ist das LGS lösbar.